Representaciones de Fibonacci

medinarosas.jorgealberto@gmail.com

August 2019

1 Introducción

Empecemos por enunciar la siguiente fórmula,

Teorema 1. *Sea* $k, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k = \varphi_{n+2} - 1 \tag{1}$$

Es decir, la suma de todos los números de fibonacci hasta el n-ésimo es igual al fibonacci (n+2)-ésimo menos uno.

Esto quiere decir que la suma finita vuelve a ser un número de fibonacci menos uno.

Ahora observemos la siguiente fórmula infinita,

Teorema 2. *Sea* $k \in \mathbb{N}$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $0 < x < 1$*,* $x \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{-x}{x^2 + x - 1} \tag{2}$$

Podemos apreciar que del lado izquierdo es la serie de potencias con x entre 0 y 1, y con coeficientes en los números de fibonacci.

Aquí el indice de la serie k va de 0 a infinito pero gracias a que x siempre es menor que 1 la suma converge al lado derecho, el cúal es un cociente con un pólinomio de grado 2 en el denominador.

Ahora bien, y qué pasaría si únicamente sumaramos los números de fibonacci con indice par, entonces obtenemos las siguientes fórmulas,

Teorema 3. *Sea* $k, n \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{2k} = \varphi_{2n+1} - 1 \tag{3}$$

Tenemos que sucede algo parecido con la fórmula 1 y la suma vuelve a caer en ser un número de fibonacci menos uno.

Y para el caso de la serie infinita tenemos lo siguiente,

Teorema 4. *Sea* $k \in \mathbb{N}$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $-1 < x < 1$*,* $x \neq \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$$\rho(x, 2) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k} x^{2k} = \frac{x^2}{x^4 - 3x^2 + 1} \tag{4}$$

Ahora el denominador del cociente del lado derecho contiene un polinomio de grado 4.

Usando una cierta construcción podemos calcular la siguiente fórmula,

Teorema 5. *Sea* $k \in \mathbb{N}$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $-1 < x < 1$*,* $x \neq \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$$\rho(x, 4) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{4k} x^{4k} = \frac{3x^4}{x^8 - 7x^4 + 1} \tag{5}$$

Y podemos observar un 3 como coeficiente en la parte del numerador del cociente del lado derecho.
Y notar que 3 es un número de fibonacci, el φ_4
Obteniendo la siguiente iteración damos un siguiente ejemplo para 8,

Teorema 6. *Sea* $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $-1 < x < 1$, $x \neq \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$$\rho(x,8) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{8k} x^{8k} = \frac{21x^8}{x^{16} - 47x^8 + 1} \tag{6}$$

Y notar que 21 es también un número de fibonacci, el φ_8
Con esto de evidencia, obtuvimos el caso general para r potencias de 2,

Teorema 7 (Límite A)**.** *Sea* $k, r \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, $r = 2^m$, $x \in \mathbb{R}$, $-1 < x < 1$, $x \neq \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$$\beta(r) = \psi^r + \tau^r = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^r + \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^r \tag{7}$$

$$\rho(x,r) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{rk} x^{rk} = \frac{\varphi_r x^r}{x^{2r} - \beta_r x^r + 1} \tag{8}$$

Ahora bien, si nos fijamos en el lado derecho y pasamos dividiendo el número de fibonacci r-ésimo tenemos lo siguiente,

$$\Theta(x,r) = \frac{1}{\varphi_r} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{rk} x^{rk} = \frac{x^r}{x^{2r} - \beta(r) x^r + 1} \tag{9}$$

Y entonces llegando hasta aquí nos preguntamos acerca de Θ, y nos hacemos el siguiente cuestionamiento: ¿existirá alguna función que al integrar resulte en Θ o algo aproximado?
Nuestra respuesta es afirmativa y llegamos al siguiente teorema:
Sea $x, r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 4$, definimos lo siguiente

Definición 1.

$$\begin{aligned}
\alpha = \sqrt{5}, \qquad \gamma = \frac{1}{\alpha}, \qquad \psi = \frac{1+\alpha}{2}, \qquad \tau = \frac{1-\alpha}{2}\\
\varphi_r &= \gamma(\psi^r - \tau^r)\\
\beta(r) &= \psi^r + \tau^r\\
\Upsilon(r) &= \gamma(2-\beta(r))\Big(\frac{\psi^r}{\log\psi} - \frac{\tau^r}{\log\tau}\Big)\\
\Theta(x,r) &= \frac{x^r}{x^{2r} - \beta(r)x^r + 1}\\
\varphi(x,r) &= \frac{\Theta^2(x,r)}{x^{2r}}\Big[\Upsilon(r)\Big((\beta(r))' x^r - \log x (x^{2r}-1)\Big) + (\Upsilon(r))'\big(x^{2r} - \beta(r)x^r + 1\big)\Big]
\end{aligned}$$

Teorema 8. *Sea* $k \in \mathbb{N}$, $x, y, r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 4$, $-1 < x < 1$, $x \neq \{0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

$$\Theta(x,r) = \frac{1}{\Upsilon(r)} \int \varphi(x,r) x^r dr \tag{10}$$

Y si limitamos r a potencias de 2, obtenemos la siguiente fórmula,

$$\frac{1}{\varphi_r} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{rk} x^{rk} = \frac{1}{\Upsilon(r)} \int \varphi(x,r) x^r dr \tag{11}$$

Y con esto podemos pasar dividiendo la serie y obtener,

$$\frac{1}{\varphi_r} = \frac{\int \varphi(x,r)x^r dr}{\Upsilon(r)\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{rk}x^{rk}} \tag{12}$$

Y si elevamos para obtener las potencias tenemos,

$$\frac{1}{\varphi_r^z} = \frac{[\int \varphi(x,r)x^r dr]^z}{[\Upsilon(r)]^z[\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{rk}x^{rk}]^z} \tag{13}$$

Si sumamos sobre todas las potencias de 2, a partir de 4, resulta,

$$\sum_{r=4}^{\infty}\frac{1}{\varphi_r^z} = \sum_{r=4}^{\infty}\Big(\frac{[\int \varphi(x,r)x^r dr]^z}{[\Upsilon(r)]^z[\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{rk}x^{rk}]^z}\Big) \tag{14}$$

Y utilizando la fórmula de Binet,

Teorema 9 (Fórmula de Binet)**.** *Sea* $n \in \mathbb{N}$, $\psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\tau = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\varphi_n = \frac{\psi^n - \tau^n}{\sqrt{5}} \tag{15}$$

Podemos enunciar lo siguiente,

$$\zeta_r(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \sum_{r=4}^{\infty}\frac{1}{\varphi_r^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \sum_{r=4}^{\infty}\Big(\frac{[\int \varphi(x,r)x^r dr]^{\frac{z}{2}}}{[\Upsilon(r)]^{\frac{z}{2}}[\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{rk}x^{rk}]^{\frac{z}{2}}}\Big)\Big(\frac{(\sqrt{5})^{\frac{z}{2}}}{(\psi^r - \tau^r)^{\frac{z}{2}}}\Big) \tag{16}$$

Lo cual es muy parecido a la sérei de Riemann.